04.04.16

Άσκηση 46/ σελ. 374: Αν A είναι τυχόν υποσύνολο είος για Ν.δ.ο.

α) $A' \cap \text{ext} A = \varnothing$

β) $(\partial A)^\circ = \varnothing \iff (\bar{A})^\circ \subseteq \overline{A^\circ}$

Λύση

Το α) το κάναμε την προηγούμενη Δευτέρα.

β) $\varnothing = (\partial A)^\circ$

$= (\bar{A} - A^\circ)^\circ$

$= (\bar{A} \cap (A^\circ)^c)^\circ$

$= (\bar{A})^\circ \cap ((A^\circ)^c)^\circ$

$\Rightarrow \varnothing = (\bar{A})^\circ \cap (\overline{A^\circ})^c \iff (\bar{A})^\circ \subseteq \overline{A^\circ}$

Άσκηση 50/ σελ. 376: Αν A και B είναι υποσύνολα είος για ν.δ.ο.

α) $A^\circ - B^\circ \supseteq (A-B)^\circ$

Να δοθούν παραδείγματα όπου η παραπάνω σχέση να ισχύει για τη σχέση του γνήσιου υποσυνόλου.

Λύση

$(A-B)^\circ = (A \cap B^c)^\circ$

$= A^\circ \cap (B^c)^\circ$

$= A^\circ \cap (\bar{B})^c$

Είναι: $B^\circ \subseteq \bar{B} \Rightarrow (\bar{B})^c \subseteq (B^\circ)^c$, $(*)$

$\overset{(*)}{\subseteq} A^\circ \cap (B^\circ)^c$

$= A^\circ - B^\circ$

π.χ $(\mathbb{R}, |\,|)$ $A=(0,1)$

$B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Είναι: $A^\circ=(0,1)$ αφού A ανοιχτό

$B^\circ=\emptyset$

$A^\circ-B^\circ=(0,1)$

$$(A-B)^\circ=\left((0,1)-\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)^\circ$$

$$=\left((0,1)\cap\left\{\frac{1}{2}\right\}^c\right)^\circ$$

$$=(0,1)^\circ\cap\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}^c\right)^\circ$$

$$=(0,1)\cap\left(\overline{\left\{\frac{1}{2}\right\}}\right)^c$$

$$=(0,1)\cap\left\{\frac{1}{2}\right\}^c$$

$$=(0,1)-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Δηλ. $\left.\begin{array}{l} A^\circ-B^\circ=(0,1) \\ (A-B)^\circ=(0,1)-\left\{\frac{1}{2}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ-B^\circ\supset(A-B)^\circ$

Άσκηση 65 / σελ. 391: Έστω A ένα υποσύνολο ενός μχ. (E,ρ) τ.ω. $(\forall x\in E)(\exists a\in A)\ \rho(x,a)=\rho(x,A)$

Ν.δ.ο. το A είναι κλειστό σύνολο.

Λύση

Για ν.δ.ο. A κλειστό, θα πρέπει ν.δ.ο. $\bar{A}=A$ (θα πάμε με απαγωγή σε άτοπο)

Έστω $\bar{A}\neq A$.

$\bar{A}\neq A \Rightarrow A\subset\bar{A}$

$\Rightarrow x\in\bar{A} \wedge x\notin A$ (στο βιβλίο: $x\in\bar{A}-A$)

$x \in \bar{A} \xRightarrow{\text{από Εφαρμογή}} \rho(x,A)=0$

Από υπόθεση $\Rightarrow (\exists a \in A)\ \rho(x,a)=\rho(x,A)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(x,a)=0$

$\Rightarrow x = a$ ↯ $\left(\text{γιατί } \begin{cases} a \in A \\ \text{και} \\ \underbrace{x \notin A} \end{cases}\right)$

από αυτό που βρήκαμε στην προηγούμενη σελίδα

Εφαρμογή 2.6.5 / σελ. 91: Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία σ'ένα μ.χ. (E,ρ). Η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι βασική αν και μόνο αν ισχύει

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \delta\left(\{a_\nu : \nu>n\}\right)=0$$

Λύση

Θέτω $A_n = \{a_\nu : \nu>n\} = \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

Ν.δ.ο. $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική $\Leftrightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} \delta(A_n)=0$

$(\Longrightarrow)$

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική $\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall \nu,\mu\in\mathbb{N})\ \begin{smallmatrix}\nu>n_0\\ \mu>n_0\end{smallmatrix} \Rightarrow \rho(a_\nu,a_\mu)<\varepsilon$

Θα ισχύει αν αυξήσω το ε ως α.φ. : $\sup_{\substack{\nu>n_0\\ \mu>n_0}} \rho(\underbrace{a_\nu, a_\mu}_{\in A_{n_0}})<\varepsilon \Rightarrow \delta(A_{n_0})<\varepsilon$, $(*)$

$\forall n>n_0 : A_n \subseteq A_{n_0} \Rightarrow \delta(A_n) \le \delta(A_{n_0}) \overset{(*)}{<} \varepsilon$

δηλ. το A_n έχει λιγότερα στοιχεία αφού θα ξεκινάει από έω n_0+k

άρα αποδείξαμε ότι:

$(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n>n_0) : \delta(A_n)<\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\in\mathbb{N}} \delta(A_n)=0$

$(\Longleftarrow)$

Έχουμε : $\lim_{n\in\mathbb{N}} \delta(A_n)=0 \Leftrightarrow \Big| (\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\in\mathbb{N})\ n>n_0 \Rightarrow \delta(A_n)<\varepsilon$

$\Rightarrow \sup_{\substack{\nu > n_0 \\ \mu > n_0}} \rho(a_\nu, a_\mu) < \varepsilon$

Δηλ.

$\forall \nu, \mu \in \mathbb{N} \quad \substack{\nu > n_0 \\ \mu > n_0} \quad \rho(a_\nu, a_\mu) < \varepsilon$

άρα αποδείξαμε ότι:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu, \mu \in \mathbb{N}) \; \substack{\nu > n_0 \\ \mu > \mu_0} : \rho(a_\nu, a_\mu) < \varepsilon \Rightarrow (a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική

Εφαρμογή: (σελ. 80)

$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες εν $(\mathbb{R}, |\,|)$

$(p_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, $(q_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες σ' ένα σταθμητό δ.χ. E,

P στάθμη στον E

Έστω ισχύει: $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = a$, $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} \beta_\nu = \beta$, $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} p_\nu = p$, $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} q_\nu = q$,

a, β εν $\mathbb{R}$, p, q εν E

Τότε η $(a_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει (εν E) και μάλιστα

$$\lim_{\nu\in\mathbb{N}} (a_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu) = \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu \lim_{\nu\in\mathbb{N}} p_\nu + \lim_{\nu\in\mathbb{N}} \beta_\nu \lim_{\nu\in\mathbb{N}} q_\nu = ap + \beta q$$

Απόδειξη

$\rho(a_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu, ap + \beta q) \to 0$ (αυτό θέλουμε να τ' αποδείξουμε)

$$\begin{aligned}
\rho(a_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu, ap + \beta q) &= P\big((a_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu) - (ap + \beta q)\big) \\
&= P\big(\underbrace{a_\nu p_\nu + \beta_\nu q_\nu - ap - \beta q}_{\text{τα έχουμε}} \underbrace{+ p_\nu a - p_\nu a + q_\nu \beta - q_\nu \beta}_{\text{τα προσθαφαιρούμε}}\big) \\
&= P\big((a_\nu - a)p_\nu + (\beta_\nu - \beta)q_\nu + a(p_\nu - p) + \beta(q_\nu - q)\big) \\
\text{τριγωνική ιδιότητα} \rightarrow &\le P((a_\nu - a)p_\nu) + P((\beta_\nu - \beta)q_\nu) + P(a(p_\nu - p)) + P(\beta(q_\nu - q)) \\
&= \underbrace{|a_\nu - a|}_{\to 0} P(p_\nu) + \underbrace{|\beta_\nu - \beta|}_{\to 0} P(q_\nu) + |a| \underbrace{P(p_\nu - p)}_{\rho(p_\nu, p) \to 0} + |\beta| \underbrace{P(q_\nu - q)}_{\rho(q_\nu, q) \to 0}
\end{aligned}$$

Αφού p_ν, q_ν συγκλίνουσες άρα και φραγμένες $\longrightarrow 0$

πρέπει να εξασφαλίσω ότι δεν είναι ∞

⇓

βολεύει να είναι φραγμένη ώστε 0 επί φραγμ. $= 0$

Εφαρμογή / σελ. 97-98: E διανυσματικός χ.δ.χ., $A \subseteq E$, $B \subseteq E$
μπορούμε να μιλάμε για θήκες
Τότε $\bar{A} + \bar{B} \subseteq \overline{A+B}$

Λύση

$$A+B = \{x+y : x \in A \text{ και } y \in B\}$$

$z \in \bar{A} + \bar{B} \Rightarrow z = x+y$, $x \in \bar{A}$ και $y \in \bar{B}$

Έχουμε ότι: A κλειστό $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ εν } A \text{, συγκλίνουσα} \\ \text{ισχύει : } \lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu \in A \end{array} \right.$

$$\left.\begin{array}{l} x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ εν } A, \ \lim x_\nu = x \\ y \in \bar{B} \Rightarrow \exists (y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ εν } B, \ \lim y_\nu = y \end{array}\right\} \leftarrow \text{από προηγούμενη εφαρμογή}$$

$$\Rightarrow \lim_{\nu\in\mathbb{N}} (x_\nu + y_\nu) = \lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu + \lim_{\nu\in\mathbb{N}} y_\nu = x+y.$$

Αλλά, $(x_\nu + y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία $A+B$.

Άρα: $x+y \in \overline{A+B} \Rightarrow z \in \overline{A+B}$

Εφαρμογή 4.2.3 / σελ. 113:
(E_1, ρ) μ.χ., (E_2, N) στ. δ.χ.

$$\left.\begin{array}{l} a : E_1 \to \mathbb{R}, \quad \beta : E_1 \to \mathbb{R} \\ f : E_1 \to E_2 \\ g : E_1 \to E_2 \end{array}\right\} \text{συνεχείς}$$

Τότε, και η $af + \beta g$ συνεχής.

Λύση

$$(af + \beta g)(x) = \underbrace{a(x)}_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)}_{E_2} + \underbrace{\beta(x)}_{\mathbb{R}} \underbrace{g(x)}_{E_2}$$

άρα: $af + \beta g : E_1 \to E_2$

$x_0 \in E_1$, x_0 τυχόν και $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν E_1, με $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu = x_0$

$$(af + \beta g)(x_\nu) = a(x_\nu) f(x_\nu) + \beta(x_\nu) g(x_\nu) \longrightarrow a(x_0) f(x_0) + \beta(x_0) g(x_0)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (E_1,ρ_1), (E_2,ρ_2) μ.χ. και $f: E_1 \to E_2$. Τότε:

f συνεχής $\iff f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$, $A \subseteq E_2$

$\iff \overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$, $A \subseteq E_2$

$\iff f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$, $X \subseteq E_2$

Απόδειξη

- Έστω f συνεχής και $A \subseteq E_2$. Θ.δ.ο. $f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$

f συνεχής $\xrightarrow{A^\circ \text{ ανοιχτό}} f^{-1}(A^\circ)$ ανοιχτό

Άρα: $\underbrace{(f^{-1}(A^\circ)) = (f^{-1}(A^\circ))^\circ}_{\text{ισχύει επειδή είναι ανοιχτό}}$

$A^\circ \subseteq A \Rightarrow f^{-1}(A^\circ) \subseteq f^{-1}(A)$

$\Rightarrow (f^{-1}(A^\circ))^\circ \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$

$\Rightarrow (f^{-1}(A^\circ)) \subseteq (f^{-1}(A))$

Αντίστροφα,

Έστω $f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$, $A \subseteq E_2$. Θ.δ.ο. f συνεχής

Έστω A ανοιχτό, $A \subseteq E_2$. Τότε, $A = A^\circ$.

Άρα,

$f^{-1}(A^\circ) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq (f^{-1}(A))^\circ$

$\Rightarrow f^{-1}(A) = (f^{-1}(A))^\circ$

$\Rightarrow f^{-1}(A)$ ανοιχτό

- Έστω f συνεχής. Θ.δ.ο. $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$

$\overline{A}$ κλειστό $\xrightarrow{f \text{ συνεχής}} f^{-1}(\overline{A})$ κλειστό

$\Rightarrow f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(\overline{A})}$

$A \subseteq \overline{A} \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\overline{A})$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(A)} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{A})}$

$\Rightarrow f^{-1}(\overline{A}) \supseteq \overline{f^{-1}(A)}$

Αντίστροφα,

Έστω ισχύει $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$, $A \subseteq E_2$. Θ.δ.ο. f συνεχής

$A \subseteq E_2$, $A = \bar{A}$ (A κλειστό), $\overline{f^{-1}(A)}$ κλειστό: $\overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(A)$

Τότε,

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(\bar{A}) \overset{\text{από υπόθεση}}{\supseteq} \overline{f^{-1}(A)}$$

δεν είναι σίγουρη
$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq \bar{A} \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\bar{A}) \\ \overset{A=\bar{A}}{\Longrightarrow} \overline{f^{-1}(\bar{A})} \subseteq \overline{f^{-1}(A)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ισότητα}$$

• Έστω f συνεχής. Θ.δ.ο. $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$

y τυχόν: $y \in f(\bar{X}) \Rightarrow (\exists x \in \bar{X})\ y = f(x)$

$x \in \overline{X} \Rightarrow \exists (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν X : $\lim x_\nu = x$

$\xrightarrow{f \text{ συνεχής}} \lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f(x_\nu) = f(x) = y$

άρα καταλήξαμε στο συμπέρασμα:

$\exists (f(x_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν $f(X)$: $\lim\limits_{\nu\in\mathbb{N}} f(x_\nu) = y$

$\Rightarrow y \in \overline{f(X)}$

Αντίστροφα,

την επόμενη φορά!

Scanned by CamScanner